Eidgenössische Finanzmarktaufsicht FINMA
Autorité fédérale de surveillance des marchés financiers FINMA
Autorità federale di vigilanza sui mercati finanziari FINMA
Swiss Financial Market Supervisory Authority FINMA

Modèle standard assurances

Description technique du modèle standard SST pour l'aggrégation et le montant minimum

31 octobre 2021

Laupenstrasse 27
3003 Berne
Tel. +41 (0)31 327 91 00
Fax +41 (0)31 327 91 01
www.finma.ch

Table des matières

1 Introduction

Le présent document « Description technique du modèle standard SST pour l'agrégation et le montant minimum » définit, au sens de l'art. 50*b* de l'ordonnance sur la surveillance (OS ; RS 961.011),

- le modèle standard SST pour l'agrégation des catégories de risque (chapitre 3) ;
- la procédure standard SST pour l'agrégation de scénarios (chapitre 4) ;
- le modèle standard SST pour le calcul du montant minimum (*MVM*) (chapitre 5).

Le chapitre 2 contient des remarques générales sur le calcul du capital cible.

Ce document s'adresse notamment aux entreprises d'assurance soumises au SST qui utilisent les modèles standard en cause.

2 Calcul du capital cible SST

Forme générale du capital cible

Le capital cible selon le Cm 57 de la circulaire de la FINMA 2017/3 « SST » correspond au capital porteur de risques (CPR) qui doit au moins être disponible au moment $t = 0$ afin que la condition suivante sur le CPR et le montant minimum au moment $t = 1$ soit remplie:

$$ES_\alpha[CPR_1 - MVM_1] \geq 0$$

En termes moins formels et avec des hypothèses simplifiées pour CPR_1, cela revient à la condition de solvabilité suivante : en prenant l'*expected shortfall* des valeurs α les plus basses, la valeur proche du marché des actifs doit, au moment $t = 1$, être au moins égale à la valeur proche du marché des engagements. En raison du Cm 32 et du Cm 48, il est possible d'entendre par là que les actifs doivent être suffisants pour permettre à l'entreprise d'assurance d'honorer elle-même les engagements. Et ce, en retenant les hypothèses concernant l'évaluation au moment $t = 1$ définies aux Cm 35 à 45, à savoir notamment que l'entreprise d'assurance ne conclut aucune affaire nouvelle à partir de $t = 1$ (Cm 36) et qu'elle suive un plan bien défini (Cm 40 à 43).

Forme simplifiée du capital cible

Nous supposons maintenant au sens du Cm 60 de la circulaire de la FINMA 2017/3 que MVM_1 est déterministe au moment $t = 0$. Par application des propriétés bien connues de l'*expected shortfall*[1], la condition susmentionnée peut être transformée comme suit : on multiplie d'abord les deux côtés par le nombre positif déterministe $v = \left(1 + r_{0,1}\right)^{-1}$, puis on retranche CPR_0 des deux côtés et on multiplie par (-1). Il s'ensuit :

[1] Pour une variable aléatoire X et $a \in \mathbb{R}$, on a $ES_\alpha[X + a] = ES_\alpha[X] + a$, et pour $a > 0$ on a $ES_\alpha[a \cdot X] = a \cdot ES_\alpha[X]$.

$$-ES_{\alpha}\left[\frac{CPR_1}{1+r_{0,1}} - CPR_0\right] + \frac{MVM_1}{1+r_{0,1}} \leq CPR_0$$

Autrement dit la condition est que le CPR au moment $t = 0$ soit au moins égal au capital cible selon la formule indiquée au Cm 60 de la circulaire de la FINMA 2017/3, laquelle consiste en la somme

- du capital risque sur une année SCR_0 ; et
- du montant minimum MVM_1 actualisé ;

où le capital risque sur une année résulte de la variation du CPR sur une période d'un an. Le chapitre 3 traite du calcul du capital risque sur une année, et le chapitre 5 du calcul du montant minimum MVM_1.

3 Agrégation des catégories de risques

Ce chapitre traite de l'agrégation des catégories de risques, c'est-à-dire de la manière dont les différents effets des catégories de risques sont combinés (agrégés) pour déterminer l'effet global sur le CPR.

3.1 Calcul du capital risque sur une année

Bases

Selon le Cm 60 de la circulaire de la FINMA 2017/3 « SST » (et sous l'hypothèse simplificatrice retenue à cet endroit), le capital risque sur une année SCR_0 est donné par le négatif de l'*expected shortfall* de la distribution de la variation Z du capital porteur de risques (CPR) sur une période d'un an :

$$SCR_0 = -ES_{\alpha}[Z]$$

où

$$Z = v \cdot CPR_1 - CPR_0 \qquad \text{avec} \quad v = \left(1 + r_{0,1}\right)^{-1}$$

En adéquation avec la solvabilité du SST selon le Cm 4 de la circulaire de la FINMA 2017/3, le Cm 61 définit que le capital risque sur une année doit être déterminé selon les hypothèses énoncées au chapitre IV.B (Cm 34 à 43). Selon le Cm 34, cela implique de calculer $CPR_0 = CPR_0^g$ avec des hypothèses « *going concern* », c'est-à-dire en supposant que l'entreprise d'assurance respecte sa propre planification des affaires. Toujours selon le Cm 34, cette dernière hypothèse vaut également pour la période d'un an de $t = 0$ à $t = 1$, les engagements qui en résultent au moment $t = 1$ devant être évalués en fonction des hypothèses de « *run off* » énoncées aux Cm 35 à 43, soit $CPR_1 = CPR_1^r$. Selon les Cm 40 à 43, cela peut éventuellement impliquer une restructuration des actifs au moment $t = 1$. Concernant le calcul de CPR_1^r, on utilise les actifs avant restructuration pour l'évaluation des actifs au moment $t = 1$, et les actifs après restructuration pour l'évaluation des engagements au moment $t = 1$.

Modélisation modulaire par hypothèse de linéarité

Typiquement et en particulier dans le modèle standard SST, la variation du CPR sur une période d'un an n'est pas modélisée d'un seul trait mais sous la forme de sous-modèles distincts (« modules ») qui modélisent chacun les variations du CPR en fonction des différentes catégories de risques (p. ex. risques de l'assurance dommages, risques de marché, risques de crédit). Cette procédure repose sur des hypothèses simplificatrices que nous allons aborder par la suite.

Pour ce faire, nous nous concentrons sur la variable aléatoire CPR_1. Cette dernière est notamment calculée à partir des valeurs du bilan SST au moment $t = 1$. Nous exprimons CPR_1 comme fonction des catégories de risques $i = 1, \dots, n$ représentées par groupes de variables aléatoires $X_{i,k}$ pour $k = 1, \dots, m_i$ qui correspondent pour une part aux facteurs de risque (p. ex. pour les risques de marché) et pour une autre aux pseudo-facteurs de risque (p. ex. pour les risques de l'assurance dommages) :

$$CPR_1 = f\left(X_{1,1}, \dots, X_{1,m_1}, \dots, X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}\right)$$

Il s'agit typiquement ici d'une simplification qui repose sur l'hypothèse selon laquelle seules les valeurs des facteurs de risque au moment $t = 1$ sont pertinentes pour le calcul de CPR_1 (c'est-à-dire pour les valeurs proches du marché et les valeurs estimatives les meilleures possibles utilisées).

La fonction f dépend de manière plus ou moins compliquée des $X_{i,k}$, en général de manière non linéaire. Prenons à titre d'illustration l'exemple d'un terme représentant la valeur estimative la meilleure possible des engagements de l'assurance dommages. Représenté ici pour la situation d'une rémunération annuelle, il s'écrit comme suit :

$$\frac{X_{1,l} \cdot X_{2,c}}{\left(1 + X_{2,l}\right)^{l}}$$

$X_{1,l}$ désigne ici la variable aléatoire des paiements d'assurance attendus l'année l. Cette variable fait partie des risques de l'assurance dommages. La variable aléatoire $X_{2,c}$ désigne le taux de change stochastique de la monnaie des paiements de dommages en la monnaie du SST et $X_{2,l}$, le taux d'intérêt stochastique pour la maturité pertinente (avec une rémunération annuelle). Les variables aléatoires $X_{2,c}$ et $X_{2,l}$ font partie des risques de marché (notamment intérêts et taux de change). Le terme susmentionné est donc manifestement une fonction de variables aléatoires découlant d'une part des risques de l'assurance dommages (groupe 1 dans notre exemple), et d'autre part des risques de marché (groupe 2). Il n'est toutefois pas possible de le « linéariser » directement, c'est-à-dire d'écrire ceci comme somme de fonctions qui ne dépendent que d'une seule catégorie de risques.

C'est nonobstant cette hypothèse de linéarisation qui est retenue dans le modèle standard : on suppose que des fonctions f_i existent pour $i = 1, \dots n$ de sorte que

$$CPR_1 = f\left(X_{1,1}, \dots, X_{1,m_1}, \dots, X_{n,1}, \dots, X_{n,m_n}\right) \approx \sum_{i=1}^{n} f_i\left(X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i}\right)$$

$Z_i = f_i\left(X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i}\right)$ correspondent ici à la variation de CPR_1 sous l'effet des variables aléatoires de la catégorie de risques i, en attribuant des valeurs fixes $x_{j,k}^0$ aux variables aléatoires des autres catégories de risques $j \neq i$:

$$Z_i = f_i(X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i}) = f(x^0_{1,1}, \dots, x^0_{1,m_1}, \dots, X_{i,1}, \dots, X_{i,m_i}, \dots, x^0_{n,1}, \dots, x^0_{n,m_n})$$

Pour $x^0_{j,k}$, on retient typiquement les valeurs au moment $t = 0$ à titre de simplification. Par exemple, on retient les intérêts au moment $t = 0$ pour les risque de l'assurance dommages, et les valeurs estimatives les meilleures possibles des engagements d'assurance au moment $t = 0$ pour les risques de marché.

3.2 Modèle standard SST pour l'agrégation des catégories de risques

Dans le modèle standard SST pour l'agrégation, le capital risque sur une année SCR_0 selon le Cm 60 de la circulaire de la FINMA 2017/3 « SST » est donné par

$$SCR_0 = -ES_\alpha[Z] + RC_0^{hyp}$$

où RC_0^{hyp} désigne le risque de crédit des hypothèques, p. ex. selon le modèle standard SST pour les risques de crédit. La variable aléatoire Z désigne la variation du CPR sur une période d'un an sans tenir compte du risque de crédit des hypothèques ; elle est donnée par

$$Z = Z' + Z_{scen}$$

En l'occurrence, Z_{scen} désigne la variable aléatoire de l'effet des scénarios à agréger[2], et Z' la variation du CPR sur une période d'un an en fonction des risques d'assurance, des risques de marché et des risques de crédit sans hypothèques, qui s'exprime par:

$$Z' = Z_{marché} + Z_{crédit} + Z_{vie} + Z_{dommages} + Z_{maladie}$$

Ici $Z_{marché}$ désigne la variable aléatoire pour les risques de marché, $Z_{crédit}$ la variable aléatoire pour les risques de crédit sans hypothèques, et Z_{vie}, $Z_{dommages}$ et $Z_{maladie}$, les variables aléatoires pour les risques d'assurance vie, d'assurance dommages et d'assurance-maladie. Chaque variable aléatoire quantifie la variation du CPR sur une période d'un an en fonction de la catégorie de risques correspondante au sens et en application de l'hypothèse de linéarisation de la section 3.1. Pour les entreprises de réassurance et les captives de réassurance , $Z_{dommages}$ désigne la variable aléatoire pour le risque de (ré)assurance non-vie.

Le modèle standard pour Z' est décrit dans la présente section, alors que le processus standard pour l'agrégation des scénarios Z_{scen} fait l'objet du chapitre 4.

Dans modèle standard SST pour l'agrégation, la dépendance entre les variables aléatoires $Z_{marché}$, $Z_{crédit}$, Z_{vie}, $Z_{dommages}$ et $Z_{maladie}$ est donnée par une copule gaussienne ayant la matrice de corrélations suivante:[3]

[2] Les prescriptions relatives à l'agrégation des scénarios figurent dans la « Description technique des scénarios ».

[3] La matrice de corrélations calibre la copule gaussienne, mais ses corrélations ne correspondent en général pas aux corrélations linéaires de Pearson entre les variables aléatoires.

Catégorie de risques	Marché	Crédit	Vie	Dommages	Maladie
Marché	1	0.9	0,15	0,15	0,15
Crédit	0.9	1	0.15	0.15	0.15
Vie	0,15	0.15	1	0,25	0,25
Dommages	0,15	0.15	0,25	1	0,25
Maladie	0,15	0.15	0,25	0,25	1

Cette matrice de corrélations est destinée à un assureur « typique ». Lorsque les risques encourus divergent de façon importante, l'assureur doit soumettre une demande d'adaptation du modèle standard SST pour l'agrégation spécifique à l'entreprise au sens des Cm 107 à 109 de la circulaire FINMA 2017/3 « SST », sauf dans les situations suivantes.

Cas spécial « Assurance de crédit *monoliner* »

La dépendance entre les risques d'assurance dommages et les risques de marché tient à la nature des affaires dommages. Cette remarque concerne en particulier les entreprises qui opèrent de manière prépondérante ou exclusive dans l'assurance ou la réassurance de crédit. Ces dernières sont tenues d'utiliser le modèle standard SST pour l'agrégation avec la matrice de corrélation susmentionnée, mais avec la modification suivante :

- Corrélation entre « marché » et « dommages » : 80 %
- Corrélation entre « crédit » et « dommages » : 80 %

Cas spécial modèle interne pour le risque de crédit de la réassurance ou de la rétrocession sortantes (passives)

Nous considérons le cas où les risques de crédit de la réassurance ou de la rétrocession sortantes et les risques d'assurance (d'une ou plusieurs catégories de risques, p. ex. dommages ou réassurance) sont modélisés ensemble par un modèle interne, et dont la distribution résultante combinée est rapportée comme celle des risques d'assurance.

Dans cette situation les corrélations définies ci-avant entre les risques d'assurance (y compris le risque de crédit de la réassurance ou de la rétrocession sortantes) et les risques de marché, respectivement les risques de crédit restants, sont typiquement trop basses (en raison aussi de la dépendance élevée entre risques de crédit et risques de marché). Si cela se présente dans une proportion importante, une adaptation des corrélations du modèle standard SST pour l'agrégation est requise et doit être demandée dans le cadre du modèle interne pour le risque d'assurance et le risque de crédit de la réassurance ou de la rétrocession sortantes.

3.3 Calibrage du modèle standard SST pour l'agrégation

La matrice de corrélations pour la copule gaussienne de la section 3.2 est le résultat du processus de calibrage qui suit.

(1) Premièrement, on calibre un modèle de dépendances sous la forme d'une copule dite « gaussienne modifiée ».

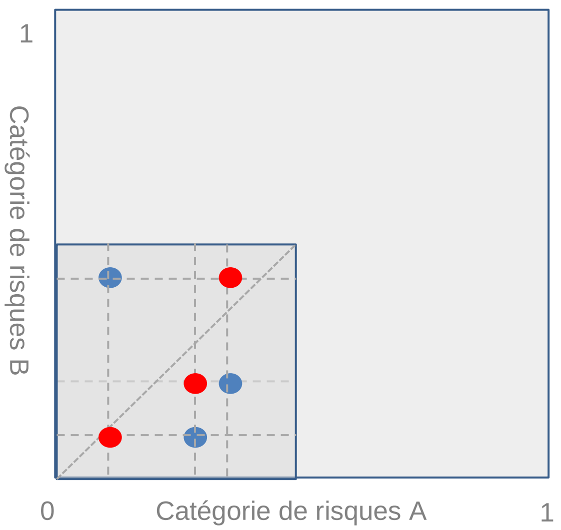
(2) Puis on obtient le modèle standard SST pour l'agrégation figurant à la section 3.2 en calibrant la matrice de corrélations d'une copule gaussienne habituelle de manière à aboutir à un capital risque sur une année comparable à celui résultant de la copule gaussienne modifiée visée en (1).

Par la suite, nous décrivons aux sections 3.3.1 et 3.3.2 la copule gaussienne modifiée et abordons ensuite brièvement, à la section 3.3.3, le calibrage de la copule gaussienne habituelle utilisée dans le SST.

3.3.1 Copule gaussienne modifiée

Idée de réarrangement (*reordering*)

L'idée de réarrangement peut être représentée par l'illustration suivante. Nous considérons les dépendances entre deux catégories de risques dans la « queue inférieure » (percentiles bas), ce qui correspond dans notre cas aux « mauvais résultats », c'est-à-dire à un CPR_1 bas causé par ces deux catégories de risques. Les trois points bleus (clairs) sont donnés par une certaine copule. Le « réarrangement » de ces trois points vise à renforcer la dépendance dans la « queue inférieure ».



Les trois points rouges (foncés) sont les points réarrangés sous un réarrangement « comonotone ». Le point rouge le plus proche de zéro résulte de la plus petite valeur de la catégorie de risques A pour les trois points bleus et de la plus petite valeur de la catégorie de risques B pour les trois points bleus, le point rouge suivant, des deuxièmes valeurs les plus petites, et le troisième, des valeurs les plus élevées. On voit que les trois points rouges sont plus proches de la diagonale, ce qui signifie que la dépendance s'est accrue avec le réarrangement. Il convient également de noter que les projections sur les catégories de risques A et B n'ont pas été modifiées.

Régime ordinaire et régime extrême

Pour modéliser les dépendances entre les catégories de risques à l'aide de la copule gaussienne modifiée, il convient de prendre en compte la propriété suivante :[4]

- Propriété (« *synthetic fact* ») : en comparaison des « situations ordinaires », les dépendances entre les catégories de risques sont accrues dans les « situations extrêmes ». C'est-à-dire que les variables aléatoires des catégories de risques prennent simultanément des valeurs basses (c'est-à-dire des CPR_1 bas) avec probabilité élevée.

Pour modéliser cette propriété, nous supposons qu'il y a différents régimes $s = 0,1, \dots, S$ avec probabilité de survenance p_s. Les régimes se distinguent par dépendances des entre les catégories de risques. Pour chaque année SST, un unique régime survient (ce qui signifie que $\sum_{s=0}^{S} p_s = 1$). $s = 0$ désigne le « régime ordinaire » dans lequel les dépendances sont données par une copule C_0 définie (p. ex. une copule gaussienne), mais qui n'est pas appropriée pour les « régimes extrêmes » $s = 1, \dots, S$.

Réarrangement conditionnel

La copule gaussienne modifiée est un cas spécial de « réarrangement conditionnel ». Nous expliquerons d'abord le réarrangement conditionnel avant de passer à la copule gaussienne modifiée.

Soit $I \in \{0,1, \dots, S\}$ la variable aléatoire indicatrice pour le régime réalisé, avec $P[I = s] = p_s$. $A_s = \{I = s\}$ pour $s = 0,1, \dots, S$ définit une décomposition disjointe de l'espace de probabilités en fonction des régimes réalisés, avec $P[A_s] = p_s$. Pour le réarrangement conditionnel, il convient de définir une copule comme mélange (*mixture*) des régimes s. C'est-à-dire étant donné les fonctions de distribution $F_s(a_1, \dots, a_d)$ des variables aléatoires définies sur A_s, une copule $\tilde{C}$ calculée comme suit :

$$\tilde{C}(a_1, \dots, a_d) = \sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot F_s(a_1, \dots, a_d) \quad \text{pour} \quad (a_1, \dots, a_d) \in [0,1]^d$$

Ceci définit une copule lorsque $\tilde{C}$ est une fonction de distribution avec des marginales uniformément distribuées sur $[0,1]$. Comme mélange, $\tilde{C}$ est une fonction de distribution car les F_s sont des fonctions de distribution. Pour précisément, nous choisissons des fonctions de distribution F_s pour $s = 0, \dots, S$ de forme suivante :

$$F_s(a_1, \dots, a_d) = C_s\left(F_{s,1}(a_1), \dots, F_{s,d}(a_d)\right)$$

[4] En ce qui concerne le modèle de la copule gaussienne habituelle de la section 3.2, cette propriété n'est remplie que dans le résultat.

pour les copules C_s et les distributions marginales $F_{s,i}$. C_0 représente la copule pour le régime ordinaire susmentionnée et nous désignons par $X_0 = (X_{0,1}, \dots, X_{0,d})$ un vecteur aléatoire sur la totalité de l'hyper-cube $[0,1]^d$ avec une fonction de distribution donnée par la copule C_0.

L'idée de « réarrangement conditionnel » consiste désormais en ceci : les distributions marginales $F_{s,i}$ de la copule C_0 restreintes à A_s sont utilisées pour toutes les fonctions de distribution F_s, à savoir

$$F_{s,i}(a_i) = P\left[X_{0,i} \leq a_i | A_s\right]$$

mais pour $s = 1, \dots, S$, la structure de dépendances est définie par des copules C_s, à la place de C_0.

Pour que $\tilde{C}$ soit effectivement une copule, il reste à démontrer que les marginales sont uniformément distribuées sur $[0,1]$. Comme les $X_{0,i}$ sont uniformément distribuées sur $[0,1]$, il en résulte par la formule des probabilités totales:

$$\sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot F_{s,i}(a_i) = \sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot P\left[X_{0,i} \leq a_i | A_s\right] = P\left[X_{0,i} \leq a_i\right] = a_i$$

Vu que les C_s sont des copules, c'est-à-dire qu'elles ont des marginales uniformément distribuées sur $[0,1]$, il en résulte ce que nous voulions démontrer:

$$\begin{aligned}\tilde{C}(1, \dots 1, a_i, 1, \dots, 1) &= \sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot C_s\left(F_{s,1}(1), \dots, F_{s,i-1}(1), F_{s,i}(a_i), F_{s,i+1}(1), \dots, F_{s,d}(1)\right) \\ &= \sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot C_s\left(1, \dots, 1, F_{s,i}(a_i), 1, \dots, 1\right) = \sum_{s=0}^{S} P[A_s] \cdot F_{s,i}(a_i) = a_i\end{aligned}$$

Implémentation du réarrangement conditionnel

La structure de dépendances définie peut être implémentée en réarrangeant pour chaque $s = 1, \dots, S$, les réalisations de X_0 en A_s selon la copule C_s (« *rank tied* ») :

(1) Pour $s = 1, \dots, S$, $\left(x_k^{s,1}, \dots, x_k^{s,d}\right)_{k=1,\dots,n}$ désignent les réalisations de X_0 en A_s.

(2) Des échantillons $\left(u_k^{s,1}, \dots, u_k^{s,d}\right)_{k=1,\dots,n}$ sont tirés de la copule C_s pour $s = 1, \dots, S$.

(3) Soit, pour $i = 1, \dots, d$, $\varphi_i(k) \in \{1, \dots, n\}$ le rang (p. ex.) croissant de $x_k^{s,i}$ au sein de $\{x_1^{s,i}, \dots, x_n^{s,i}\}$ et $\psi_i(k) \in \{1, \dots, n\}$ le rang croissant de $u_k^{s,i}$ au sein de $\{u_1^{s,i}, \dots, u_n^{s,i}\}$.

(4) Le réarrangement de $\left(x_k^{s,1}, \dots, x_k^{s,d}\right)_{k=1,\dots,n}$ est ainsi donnée par $\left(x_{\pi_1(k)}^{s,1}, \dots, x_{\pi_d(k)}^{s,d}\right)_{k=1,\dots,n}$, où $\pi_i = {\varphi_i}^{-1} \circ \psi_i$.

Par conséquent, pour $s = 1, \dots, S$, les réalisations de X_0 en A_s sont réarrangées selon la copule C_s sans que les distributions marginales en soient modifiées. Par conséquent, l'algorithme permet effectivement d'implémenter la copule $\tilde{C}$.

La spécification du réarrangement conditionnel requiert donc pour $s = 0,1, \dots, S$, les copules C_s et les sous-ensembles $A_s = \{I = s\}$ des régimes avec $P[A_s] = p_s$. Une spécification simple, en particulier pour A_s, est décrite ci-après.

Copule gaussienne modifiée

La copule gaussienne modifiée est définie comme cas spécial de réarrangement conditionnel. Soit C_0 une copule gaussienne et, à titre de simplification, soient C_s pour $s = 1, \dots, S$ également des copules gaussiennes. Soient données les probabilités p_s des régimes $s = 0, \dots, S$ avec $\sum_{s=0}^{S} p_s = 1$.

Pour tenir compte de la propriété souhaitée susmentionnée (« *synthetic fact* ») concernant les dépendances entre les catégories de risques, nous supposons à titre d'hypothèse simplificatrice que les régimes extrêmes $s = 1, \dots, S$ ne surviennent que dans les hypercubes R_s suivants au sein de $[0,1]^d$ (qui ont tendance à correspondre aux valeurs CPR_1 basses pour les catégories de risques). C'est-à-dire que pour

$$R_s = \left\{(a^1, \dots, a^d) \in [0,1]^d \middle| 0 \leq a^i < t_s^i \text{ für } i = 1, \dots, d\right\} \quad \text{pour } s = 1, .., S$$

nous supposons :

$$A_s \subseteq \{X_0 \in R_s\} \text{ pour } s = 1, .., S$$

Ceci n'est naturellement seulement possible que si $P[X_0 \in R_s] \geq P[A_s] = p_s$ pour $s = 1, .., S$. Nous y reviendrons ci-après sous « conditions restrictives ».

Dans la définition de R_s, les $0 < t_s^i \leq 1$ pour $i = 1, \dots, d$ sont les limites du régime $s = 1, \dots, S$. Le régime ordinaire $s = 0$ peut en soi aussi survenir dans les hypercubes R_s puisque dans le régime ordinaire aussi, des valeurs basses pour les catégories de risques peuvent survenir simultanément. En vertu de la définition de R_s, pour $s = 1, .., S$, la propriété $A_s \subseteq \{X_0 \in R_s\}$ est invariante sous l'effet du réarrangement, autrement dit elle implique $\tilde{A}_s \subseteq \{X_0 \in R_s\}$ pour chaque réarrangement $\tilde{A}_s$ de A_s. En d'autres termes, les points en $A_s \subseteq \{X_0 \in R_s\}$ restent en $\{X_0 \in R_s\}$ sous réarrangement pour $s = 1, \dots, S$.

Pour un régime extrême donné $s = 1, \dots, S$, il résulte de $P[A_s] = p_s$ et $A_s \subseteq \{X_0 \in R_s\}$:

$$p_s = P[I = s, X_0 \in R_s] = P[X_0 \in R_s] \cdot P[I = s | X_0 \in R_s]$$

C'est-à-dire que la probabilité $P[I = s | X_0 \in R_s]$ qu'il faille réarranger les points de X_0 au sein de R_s car ils correspondent à une réalisation du régime s (c'est-à-dire $I = s$) dépend de la probabilité que X_0 tombe dans R_s :

$$P[I = s | X_0 \in R_s] = \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]}$$

Il en résulte une variante simple pour la définition des sous-ensembles $A_s = \{I = s\}$:

- Définition des sous-ensembles $A_s = \{I = s\} \subseteq \{X_0 \in R_s\}$ pour $s = 0,..,S$: Pour $s = 1,..,S$ nous supposons que les réalisations $I = s$ au sein de $\{X_0 \in R_s\}$ sont distribuées de manière "identique" en ce sens que pour chaque sous-ensemble $M \subseteq R_s$ avec $P[X_0 \in M] > 0$, on ait :

$$P[I = s | X_0 \in M] = P[I = s | X_0 \in R_s] = \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]}$$

  Pour $s = 1,..,S$, A_s peut ensuite être défini comme suit au moyen d'une variable aléatoire de Bernouilli B_s, qui est indépendante de X_0, et avec $P[B_s = 1] = \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]}$ (et les B_s sont indépendantes entre elles):

$$A_s = \{X_0 \in R_s, B_s = 1\}$$

  Enfin, A_0 est défini comme le complémentaire des A_s pour $s = 1,..,S$.

Pour l'implémentation, ceci signifie que l'on détermine à l'aide de la variable aléatoire indépendante de Bernouilli B_s quelles réalisations de X_0 en R_s sont réarrangées.

Conditions restrictives pour la copule gaussienne modifiée

La copule gaussienne modifiée construite selon les explications ci-avant ne peut pas être définie pour n'importe quels paramètres en raison de la condition restrictive suivante : si $S_0 \subseteq \{1, \dots, S\}$ est un sous-ensemble avec $P\left[X_0 \in \bigcap_{s \in S_0} R_s\right] > 0$, la fonction $s \in \{0,1, \dots, S\} \mapsto P\left[I = s \middle| X_0 \in \bigcap_{s \in S_0} R_s\right]$ définit une distribution de probabilité et on doit donc en particulier satisfaire à :

$$\sum_{s=0}^{S} P\left[I = s \middle| X_0 \in \bigcap\nolimits_{s \in S_0} R_s\right] = 1$$

Pour la définition susmentionnée des sous-ensembles $A_s = \{I = s\}$, il en résulte, par l'hypothèse de« distribution identique » qui implique $P\left[I = s \middle| X_0 \in \bigcap_{s \in S_0} R_s\right] = \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]}$ et par la restriction de la somme à $s \in S_0$, la condition

$$\sum_{s \in S_0} \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]} \leq 1$$

Cette condition est en particulier remplie lorsque

- **Condition restrictive suffisante** :

$$\sum_{s=1}^{S} \frac{p_s}{P[X_0 \in R_s]} \leq 1$$

Paramètres

Pour la copule gaussienne modifiée, il faut définir les paramètres suivants :

(a) Matrice de corrélations de la copule gaussienne C_0 pour le régime ordinaire ;

(b) Probabilité de survenance p_s pour chaque régime extrême $s = 1,..,S$;

(c) Limites t_s^i par catégorie de risques $i = 1,\dots,d$ pour chaque régime extrême $s = 1,..,S$;

(d) Matrices de corrélations de la copule gaussienne C_s pour chaque régime extrême $s = 1,..,S$.

3.3.2 Calibrage de la copule gaussienne modifiée

Pour définir les paramètres visés aux lettres (a) à (d) de la section 3.3.1 concernant la copule gaussienne modifiée, nous considérons des événements qui génèrent des dépendances entre les variables aléatoires $Z_{marché}$, $Z_{crédit}$, Z_{vie}, $Z_{dommages}$ et $Z_{maladie}$ des variations du CPR en fonction des différentes catégories de risques. Pour ce faire, nous distinguons entre deux calibrages:

Calibrage pour le régime ordinaire (à savoir de C_0)

Dans le régime ordinaire, nous partons de l'hypothèse que les dépendances entre les catégories de risques naissent de l'effet combiné des facteurs de dépendance. Comme exemples de facteurs de dépendances, on peut citer la « hausse de l'inflation », « l'augmentation de la longévité » et la « détérioration des marchés financiers » (détérioration, mais pas une crise).

L'estimation de la matrice de corrélations de la copule gaussienne C_0 issue de l'effet combiné des générateurs de dépendance résulte des étapes suivantes :

(1) Par catégorie de risques, l'effet de chaque générateur de dépendance sur les variations du CPR de la catégorie de risques concernée fait l'objet d'une appréciation qualitative pour un assureur « typique » (le CPR « baisse fortement », « baisse » ou « est neutre »).

(2) Pour chaque paire de catégories de risques, l'effet de chaque générateur de dépendance sur les deux catégories de risques fait l'objet d'une appréciation de la dépendance entre les catégories de risques causé par le générateur de risque (« neutre » si chacun des effets est « neutre »; « baisse » si l'un est « baisse » et l'autre « baisse » ou « baisse fortement »; « baisse fortement » si les deux sont « baisse fortement »).

(3) Pour chaque paire de catégories de risques, la corrélation correspondante résulte de la combinaison des dépendances entre les catégories de risques causée par les générateurs de dépendance considérés.

Calibrage pour les régimes extrêmes (à savoir de p_s, $(t_s^i)_{i=1,\dots,d}$ et C_s pour $s = 1,\dots,S$)

Chaque régime extrême $s = 1,\dots,S$ est défini par une classe représentative d'événements ayant un effet sur plusieurs catégories de risques (cf. ci-après) et se voit associer une probabilité de survenance p_s. Les étapes suivantes sont réalisées pour chaque régime extrême :

(1) Par catégorie de risques, l'effet des événements sur les variations du CPR de la catégorie de risques concernée fait l'objet d'une appréciation qualitative pour un assureur « typique » (« élevé », « relativement élevé », « moyen », « relativement bas » et « bas »).

(2) De ces appréciations qualitatives s'ensuivent des limites t_s^i pour chaque catégorie de risques $i = 1, \dots, d$ et des corrélations de la matrice de corrélations de la copule gaussienne C_s pour chaque paire de catégories de risques. On retient par exemple qu'un effet « élevé » sur la catégorie de risques A et un effet « relativement élevé » sur la catégorie de risques B entraînent une corrélation « relativement élevée ».

Les régimes extrêmes suivants sont pris en compte :

(a) Régime « financial distress »/ « crise financière » ($s = 1$) : probabilité de survenance $p_1 = 0{,}01$;

(b) Régime « pandémie » ($s = 2$) : probabilité de survenance $p_2 = 0{,}01$;

(c) Régime « catastrophe » ($s = 3$) : probabilité de survenance $p_3 = 0{,}02$. Entrent par exemple dans ce dernier régime: cat nat, *World Trade Center*, éruptions volcaniques, *emerging liability catastrophe*, etc.

Les paramètres pour la copule gaussienne modifiée sont estimés sur la base de relations économiques, d'hypothèses plausibles sur l'effet sur les affaires d'assurance et d'appréciations d'experts de la FINMA et de l'industrie.

3.3.3 Calibrage de la copule gaussienne habituelle pour le SST

La matrice de corrélations de la copule gaussienne habituelle visée à la section 3.2 est calibrée en fonction des résultats SST à l'échelle du marché de sorte que les résultats SST moyens soient les mêmes pour la copule gaussienne modifiée et la copule gaussienne habituelle (par branche et pour les groupes d'assurance génériques).

4 Procédure standard pour l'agrégation de scénarios

4.1 Agrégation à partir de la variation sur une période d'un an modélisée

Comme au chapitre 3, nous considérons la variation du capital porteur de risques (CPR) sur une période d'un an,

$$Z = v \cdot CPR_1 - CPR_0 \qquad \text{avec } v = \left(1 + r_{0,1}\right)^{-1}$$

Dans l'optique du Cm 74 de la circulaire de la FINMA 2017/3 « SST », nous considérons le cas dans lequel « le modèle utilisé ne prend pas suffisamment en compte certains scénarios » et où ces derniers « sont pris en considération dans le capital cible par l'intermédiaire d'une agrégation ».[5] Z_0 désigne ici la variation sur une période d'un an issue du modèle utilisé, avec fonction de distribution cumulative F_{Z_0}. La prise en compte insuffisante des scénarios est traduite par le fait que le modèle utilisé ne modélise pas la distribution complète de CPR_1, mais la distribution d'un autre variable aléatoire CPR_1^*, à savoir

$$Z_0 = v \cdot CPR_1^* - CPR_0$$

En procédant à l'agrégation appropriée de Z_0 et d'une une variable aléatoire Z_1 (dont on verra qu'une spécification particulière est issue des scénarios) on doit obtenir la variation du CPR souhaitée, ce qui s'exprime par:

$$Z = Z_0 + Z_1$$

avec

$$Z_1 = v \cdot (CPR_1 - CPR_1^*)$$

4.2 Scénarios

Nous partons de l'hypothèse que la variable aléatoire $Z_1 = v \cdot (CPR_1 - CPR_1^*)$ peut être suffisamment bien approximée par une variable aléatoire Z_{scen} de forme particulière

(A1) $\quad Z_1 = v \cdot (CPR_1 - CPR_1^*) \approx Z_{scen} = \sum_{s=1}^{S} c_s \cdot 1_{A_s}$

Ici $c_s \in \mathbb{R}$, et 1_{A_s} désigne la fonction indicatrice de l'ensemble A_s, et nous supposons que :

(A2) $\quad Z_0$ et 1_{A_s} pour $s = 1, \ldots, S$ sont indépendantes.

Nous interprétons Z_{scen} comme l'effet des scénarios $s = 1, \ldots, S$, où

- A_s désigne l'événement où le scénario $s \in \{1, \ldots, S\}$ survient, avec une probabilité de survenance $P[A_s] = p_s \in [0,1]$ (typiquement faible) ;
- $c_s \in \mathbb{R}$ désigne l'effet du scénario (typiquement négatif).

A_0 désigne l'événement où aucun scénario ne survient, et nous supposons que :

(A3) $\quad \{A_0, A_1, \ldots, A_s\}$ définissent une partition (c'est-à-dire une décomposition disjointe) de l'espace de probabilités. En d'autres termes, seul un scénario peut survenir et au maximum une fois par année.

De plus, on pose $c_0 = 0$ et $p_0 = P[A_0] = 1 - \sum_{s=1}^{S} p_s$, en supposant que $p_0 > 0$.

[5] "ne prend pas suffisamment en compte" s'entend aussi en prenant en considération les risques de crédit des hypothèques.

Nous remarquons que c_s est un nombre négatif lorsque la situation se détériore avec la survenance du scénario, c'est-à-dire lorsque le CPR s'amenuise – ce qui constitue le cas typique. De plus, dans l'interprétation du scénario, (A2) correspond à l'hypothèse selon laquelle Z_0 n'a pas d'effet sur la fréquence de survenance des différents scénarios.

Selon le Cm 73 de la circulaire de la FINMA 2017/3, l'effet du scénario $c_s \in \mathbb{R}$ est donné par la variation du CPR au moment $t = 1$ causée par la survenance du scénario (parmi d'autres spécifications).[6] Cela découle de (A1) et (A3), car $Z_1 = v \cdot (CPR_1 - CPR_1^*)$ est approximativement constant et égal à c_s sur A_s pour $s = 1, \dots, S$:

$$Z_1 = v \cdot (CPR_1 - CPR_1^*) \approx Z_{Scen} = c_s \quad \text{sur } A_s$$

Pour calculer l'effet d'un scénario, CPR_1 et CPR_1^* sont typiquement écris, par analogie à la section 3.1, comme fonction du portefeuille et des (pseudo-) facteurs de risque $X_{i,k}$, étant entendu que pour CPR_1^* la distribution des (pseudo-) facteurs de risque est « trop faible » et que celle de CPR_1 est « renforcée » par les scénarios. Ecrivons cette fonction comme suit :

$$CPR\big(\text{portefeuille}, (\text{pseudo}-)\text{facteurs de risque } X_{i,k}\big)$$

Pour pouvoir calculer l'effet d'un scénario, on prend typiquement le portefeuille au moment $t = 1$, en retenant toutefois la simplification suivante : pour le CPR sans scénario, les (pseudo-) facteurs de risque $X_{i,k}$ sont supposés égaux à leurs valeurs $x_{i,k}^0$ au moment $t = 0$. Pour le CPR quand un scénario survient, les (pseudo-) facteurs de risque $X_{i,k}$ sont supposés égaux leurs valeurs $x_{i,k}^{scen}$ telles que définies par le scénario. (On utilise $x_{i,k}^{scen} = x_{i,k}^0$ pour les (pseudo-) facteurs de risque qui ne sont touchés par le scénario.) Par conséquent l'effet du scénario $c_s \in \mathbb{R}$ est calculé comme suit :

$$\begin{aligned} c_s \approx v \cdot \Big(& CPR\big(\text{portefeuille au moment } t = 1, (\text{pseudo}-)\text{facteurs de risque } X_{i,k} = x_{i,k}^{scen}\big) \\ & - CPR\big(\text{portefeuille au moment } t = 1, (\text{pseudo}-)\text{facteurs de risque } X_{i,k} = x_{i,k}^{0}\big)\Big) \end{aligned}$$

4.3 Agrégation des scénarios

Pour la fonction de distribution cumulative F_Z de la variation Z du CPR sur une période d'un an (sans risque de crédit des hypothèques), nous obtenons par (A1), (A3) et la formule des probabilités totales :

$$F_Z(z) \approx P[Z_0 + Z_{Scen} \leq z] = \sum_{s=0}^{S} P[Z_0 + Z_{Scen} \leq z | A_s] \cdot P[A_s] = \sum_{s=0}^{S} P[Z_0 \leq z - c_s | A_s] \cdot p_s$$

Avec l'hypothèse (A2), $P[Z_0 \leq z - c_s | A_s] = P[Z_0 \leq z - c_s]$, il s'ensuit donc

[6] Dans l'optique du Cm 74 de la circulaire de la FINMA 2017/3, nous supposons ici que l'effet du scénario s est contenu dans la variable aléatoire CPR_1, mais pas dans la variable aléatoire CPR_1^*.

$$F_Z(z) = \sum_{s=0}^{S} F_{Z_0}(z - c_s) \cdot p_s$$

Pour la mise en oeuvre de l'agrégation des scénarios, deux possibilités en particulier s'offrent à l'utilisateur:

(a) l'une **basée sur la distribution** : utilisation de la formule indiquée ci-avant pour $F_Z(z)$;

(b) l'autre basée sur la simulation : simulation de $Z \approx Z_0 + Z_{Scen}$ en utilisant (A2) et (A3).

Dans le *SST-Tool*, c'est la variante (b) qui est implémentée.

5 Calcul du montant minimum (*MVM*)

5.1 Bases

Formule générale pour le MVM

Selon l'art. 41, al. 3 OS, version allemande, le montant minimum est le coût du capital pour le capital porteur de risque qu'il faut mettre à disposition pendant la durée de liquidation des engagements d'assurance. Selon le Cm 51 de la circulaire FINMA 2017/3 « SST » et en application du Cm 39 et du Cm 53, le montant minimum (au moment $t = 1$) est calculé comme

$$MVM_1 = \sum_{k \geq 1} E\left[\frac{CoC \cdot \widetilde{SCR}_k}{\left(1 + R_{1,k+1}\right)^k} | \mathcal{F}_1\right]$$

CoC désigne ici le taux des coûts du capital selon le Cm 53 et $\mathcal{F}_1$, la sigma-algèbre des informations disponibles au moment $t = 1$. Le capital risque sur une année $\widetilde{SCR}_k$ pour l'année k (c'est-à-dire de $t = k$ à $t = k + 1$) et le facteur d'actualisation $1/\left(1 + R_{1,k+1}\right)^k$ de $t = k + 1$ à $t = 1$ sont stochastiques du point de vue de $t = 0$. En général, il en va de même pour MVM_1.

Formule simplifiée pour le MVM

La formule permettant de calculer le capital cible comme la somme du capital risque sur une année et du montant minimum actualisé (chapitre 2) repose, selon le Cm 60, sur l'hypothèse que MVM_1 est déterministe du point de vue de $t = 0$. Cela correspond au Cm 52 selon lequel, sauf prescription divergente de la FINMA, le montant minimum au moment $t = 1$ peut être calculé comme :

$$MVM_1 = CoC \cdot \sum_{k \geq 1} \frac{SCR_k}{E\left[\left(1 + R_{1,k+1}\right)^k\right]}$$

SCR_k désigne désormais le capital risque sur une année définit par analogie au Cm 60 *sous l'évolution attendue* jusqu'au moment $t = k$. En retenant l'hypothèse simplificatrice suivante pour les intérêts

$$(1+r_{0,1})\cdot E\left[(1+R_{1,k+1})^k\right]\approx(1+r_{0,k+1})^{k+1}$$

nous obtenons comme montant minimum actualisé tel que défini comme terme du capital cible selon le Cm 60 :

$$\frac{MVM_1}{1+r_{0,1}}=CoC\cdot\sum_{k\geq 1}\frac{SCR_k}{(1+r_{0,k+1})^{k+1}}$$

où:

- $CoC = 6\ \% =$ taux des coûts du capital selon le Cm 53 ;
- $SCR_k =$ le capital risque sur une année pour l'année k (c'est-à-dire de $t = k$ à $t = k + 1$) défini par analogie au Cm 60 sous l'évolution attendue jusqu'au moment $t = k$; et
- $r_{0,k+1} =$ le taux d'intérêt sans risque de $t = 0$ à $t = k + 1$.

Pour le calcul effectif du MVM, il est pertinent que SCR_k soit constitué de composantes de plusieurs classes de risques dont le risque sur une année évolue différemment au fil du temps. Ainsi, il est possible que les affaires d'assurance dommages présentant une « *short tail* » ne contribuent plus, après quelques années, au capital risque sur une année, contrairement, par exemple, aux affaires vie à long terme. Ceci implique une diversification relative décroissante au sein de SCR_k au fil du temps, aussi par la réduction du volume au sein d'une classe de risques.

Hypothèses relatives à l'évaluation au moment $t = 1$

Selon le Cm 48 et pour le moment $t = 1$ en particulier, il faut utiliser les hypothèses applicables à l'évaluation au moment $t = 1$ énoncées au Cm 36 à 43, notamment le Cm 36 selon lequel aucune affaire nouvelle n'est conclue à partir de $t = 1$. Les Cm 40 à 43 prévoient un plan pour honorer soi-même ses engagements qui permet de réduire autant que possible leur valeur et qui contient des hypothèses pour négocier les actifs dans le cadre de ce plan.

Il en ressort notamment la conception que les actifs au moment $t = 1$ sont choisis de manière à ce que ne subsiste que le risque de marché impossible à couvrir (« *non-hedgeable* »), sachant que seuls des actifs présentant une valeur de marché fiable au sens du Cm 31 peuvent être achetés (à l'exception du Cm 43) et qu'aucun actif ne présentant pas de valeur de marché fiable ne peut être vendu après $t = 1$.

5.2 Modèle standard pour le montant minimum

Dans le modèle standard, le montant minimum actualisé $\frac{MVM_1}{1+r_{0,1}}$ d'une société équivaut à la somme

$$\frac{MVM_1}{1+r_{0,1}}=MVM_{vie}+MVM_{dommages}+MVM_{maladie}+MVM_{ré}+MVM_{captives}+MVM_{marché\,nh}$$

C'est-à-dire que le montant minimum actualisé est la somme des « montants minimums des branches » $MVM_{branche}$ pour $branche\ \in \{\text{vie}, \text{dommages}, \text{maladie}, \text{ré}, \text{captives}\}$ et de la composante

$MVM_{marché\,nh}$ du montant minimum pour le risque de marché impossible à couvrir (« *non-hedgeable* »). Le modèle standard pour $MVM_{Marché\,nh}$ est décrit à la section 5.3.

Les « montants minimums par branche » $MVM_{branche}$ couvrent les catégories de risques suivantes :

- risques d'assurance de la branche ;
- risques de crédit de la réassurance sortante (passive) de la branche ;
- scénarios de la branche.

Les risques de crédit des placements sont supposés nul. Le calcul des « montants minimums par branche » est expliqué dans les descriptions techniques respectives des modèles standard spécifiques aux branches. Dans le SST-Template, la branche dommages désigne au besoin aussi les branches ré et captives.

5.3 Modèle standard pour le MVM du risque de marché impossible à couvrir (« *non-hedgeable* »)

On retient la simplification selon laquelle le montant minimum $MVM_{marché\,nh}$ du risque de marché impossible à couvrir est égal au risque de marché (*standalone*) $SCR_{marché}$ du capital risque sur une année (pour l'année $t = 0$ à $t = 1$) multiplié par un facteur $factor_{marché\,nh}$:

$$MVM_{marché\,nh} = factor_{marché\,nh} \cdot SCR_{marché}$$

Le facteur $factor_{marché\,nh}$ est déterminé comme suit :

$$factor_{marché\,nh} = 6\% \cdot \frac{BE_{vie} + \chi_{dommages} \cdot BE_{dommages} + BE_{maladie} + \chi_{ré} \cdot BE_{ré} + \chi_{captives} \cdot BE_{captives}}{BE_{vie} + BE_{dommages} + BE_{maladie} + BE_{ré} + BE_{captives}}$$

où

- $BE_{branche}$ = « *best estimate* » (actualisé) des engagements d'assurance par branche ;
- $BE_{branche}^{(N)}$ = « *best estimate* » non actualisé des engagements d'assurance par branche ;
- $BE_{branche,">15"}^{(N)}$ = « *best estimate* » non actualisé des engagements d'assurance par branche pour les *cash flows* de toutes les années après l'année 15.
- $$\chi_{branche} = \begin{cases} 1, & \text{si } \dfrac{BE_{branche,">15"}^{(N)}}{BE_{branche}^{(N)}} \geq 0{,}1 \\ 0, & \text{si } \dfrac{BE_{branche,">15"}^{(N)}}{BE_{branche}^{(N)}} < 0{,}1 \end{cases} \qquad \text{pour } branche \in \{\text{dommages}, \text{ré}\}$$

Pout la branche captives, on pose $\chi_{captives} = 0$ à titre de simplification et en raison de cash flows habituellement courts. Pour le calcul de $BE_{branche}$, $BE_{branche}^{(N)}$ et $BE_{branche,">15"}^{(N)}$, nous renvoyons à la description technique respective du modèle standard spécifique à la branche.

L'utilisation de $\chi_{branche}$ se fonde sur l'hypothèse que (seuls) les emprunts d'Etat jusqu'à une maturité de 15 ans ont des valeurs de marché fiables et que donc seuls les *cash flows* à long terme dans les branches dommages et réassurance contribuent matériellement au risque de marché impossible à couvrir. Les 6 % de la formule concernant $factor_{marché\ nh}$ ne correspondent pas au taux des coûts du capital CoC, mais résultent d'une comparaison de l'industrie sur la base du SST entre les risques de marché et les composantes MVM pour le risque de marché impossible à couvrir.